Pascal Jara Martínez.
Estalmat Andalucía

Sucesiones de números

ESTALMAT
XIV Seminario sobre actividades para estimular el talento precoz en Matemáticas
Las Palmas, 1–3 de abril de 2022

Poliedros

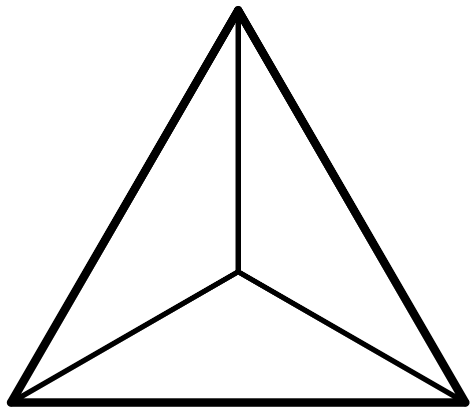
Si P es un poliedro convexo en un espacio tridimensional y llamamos

- V al número de vértices,
- A al número de aristas, y
- C al número de caras,

la **fórmula de Euler** nos dice que se tiene la igualdad:

$$V + C = A + 2.$$

Una prueba de este resultado se puede hace por inducción sobre el número de caras. Primero hacemos un cambio en el poliedro; desarrollamos el poliedro sobre el plano simplemente proyectando desde una de sus caras. De esta forma en el plano tendremos un polígono cuyo interior está dividido en regiones, cada una representa una cara del poliedro; cada región está separada de otra por segmentos, que son las aristas del poliedro, y las aristas se cortan en los vértices del poliedro.
Imagina un tetraedro y su desarrollo en el plano:



El tetraedro tiene 4 caras: las 3 que vemos y la cara desde la que proyectamos; tiene 6 aristas: los 6 segmentos que aparecen en la figura y tiene 4 vértices, los puntos de corte de las aristas.
En este caso, de la figura, obtenemos: $v + c = a + 1$, faltaría añadir la cara desde la que proyectamos.

Vamos a probar por inducción que si tenemos un *polígono*, dividido en regiones, que *proviene de un poliedro*, se verifica esta fórmula. Para ello basta ver el resultado más general: "*La fórmula* $v+c = a+1$ *es cierta en cualquier* polígono *plano dividido en regiones*."

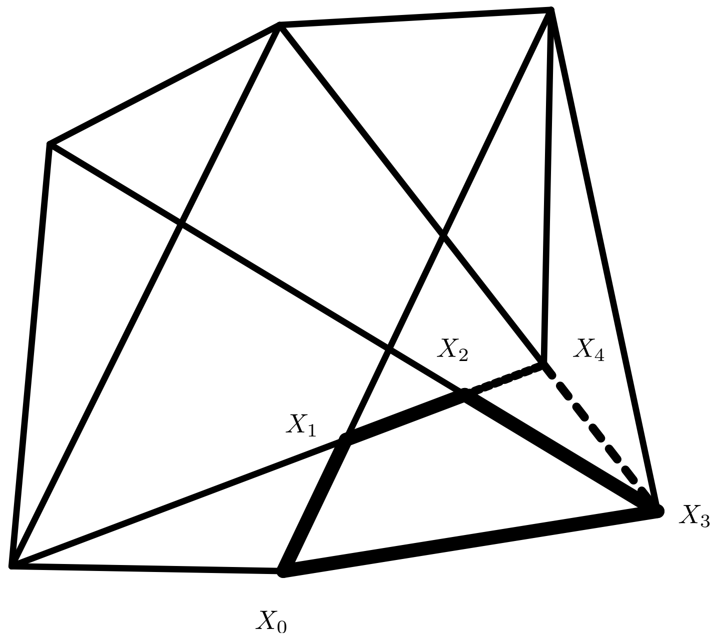
Si tenemos una sola cara, tendremos: $v + 1 = a + 1$, ya que en todo polígono el número de aristas coincide con el número de vértices.

Suponemos que el resultado es cierto para *polígonos* divididos en n o menos regiones, y consideramos un *polígono* con $n + 1$ regiones. Llamamos v al número de vértices y a al número de aristas.

Al menos una de las regiones tiene una arista en el contorno del *polígono*. Supongamos que esta región tiene h vértices y h aristas. Al suprimirla hay que determinar cuantos vértices y aristas tiene en común con el resto de las regiones. Supongamos que tiene en común k aristas y $k + 1$ vértices (siempre hay un vértice más). Tenemos pues una figura con

$$\begin{aligned}&n \text{ regiones},\\ &a - k \text{ aristas},\\ &v - k + 1 \text{ vértices}.\end{aligned}$$

Por la hipótesis de inducción se tiene $(v - k + 1) + n = (a - k) + 1$, o equivalentemente $v + n = a$. Por tanto $v + (n + 1) = a + 1$, y tenemos el resultado.


X_2
X_4
X_1
X_3
X_0

Nuestro objetivo es introducir poliedros en dimensiones superiores, y para ello nos vamos a basar en las propiedades que intuimos de los poliedros en dimensión tres y en particular en el cubo.

Dimensión cero

En dimensión 0 un cubo es simplemente un punto por lo que el número de vértices es 1, y el de aristas y caras es 0.
***¡pinta un punto en la pizarra!

Dimensión uno

En dimensión 1 un cubo es simplemente un segmento. Podemos suponer que este segmento está sobre la recta real, y que sus vértices son los puntos 0 y 1. Tiene 2 vértices, 1 arista y 0 caras.
***¡pinta un segmento en la pizarra!

Para simplificar, vamos a llamar **cara** a todo vértice, arista o componente de dimensión mayor que 1, y como tendremos caras de varias dimensiones, llamaremos 0–cara al vértice, 1–cara a la arista, 2–cara a la cara propiamente dicha, 3–cara a la componente de dimensión 3, etc., atendiendo a su dimensión.
Representamos por $c_{i,j}$ el número de j–caras de un cubo de dimensión i.

Según lo ya visto tenemos:
$c_{0,0} = 1$, y $c_{0,j} = 0$ si $j \geq 1$.
$c_{1,0} = 2$, $c_{1,1} = 1$, y $c_{1,j} = 0$ si $j \geq 2$.

Dimensión dos

En dimensión 2 un cubo es simplemente un cuadrado. Podemos suponer que los vértices de este cuadrado son los puntos $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ y $(1,0)$.
***¡pinta un cuadrado en la pizarra!

Tenemos:
$c_{2,0} = 4$, $c_{2,1} = 4$, $c_{2,2} = 1$, y $c_{2,j} = 0$ si $j \geq 3$.

Dimensión tres

En dimensión 3 un cubo es simplemente un cubo. Podemos suponer que los vértices de este cubo son los puntos $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,1)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$ $(1,0,1)$ y $(1,0,0)$.
***¡pinta un cubo en la pizarra!

Tenemos:

$c_{3,0} = 8$, $c_{3,1} = 12$, $c_{3,2} = 6$, $c_{3,3} = 1$, y $c_{3,j} = 0$ si $j \geq 4$.
Observa que:

(1) Para construir las 2–caras (caras propiamente dichas) basta con fijar dos de las direcciones y dar valores a la tercera (los valores posibles son 0 ó 1). Por tanto el número de 2-caras es $c_{3,2} = \binom{3}{2} \times 2 = 6$.
(2) Para construir las 1–caras (aristas) tenemos que fijar una dirección, y dar valores a las otras dos. Por tanto el número de 1–caras es $c_{3,1} = \binom{3}{1} \times 2^2 = 12$.
(3) Finalmente el número de 0–caras (vértices) se consigue dando todos los valores posibles a cada una de las tres direcciones. Por tanto el número de 0–caras es $c_{3,0} = 2^3 = 8$.

Dimensión cuatro

En dimensión 4 un cubo tendrá los vertices $(0,0,0,0),\dots,(1,1,1,1)$, en total 2^4. Tenemos:

- El número de 0–caras es $c_{4,0} = 2^4 = 16$.
- El número de 1–caras es $c_{4,1} = \binom{4}{1} \times 2^3 = 32$.
- El número de 2–caras es $c_{4,2} = \binom{4}{2} \times 2^2 = 24$.
- El número de 3–caras es $c_{4,3} = \binom{4}{3} \times 2 = 8$.
- El número de 4–caras es $c_{4,4} = \binom{4}{4} = 1$.

De forma similar podemos construir estos datos para cubos en dimensión 5, 6, etc.

Obtenemos la siguiente tabla.

dim	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
0	1							
1	2	1						
2	4	4	1					
3	8	12	6	1				
4	16	32	24	8	1			
5	$\binom{5}{5}\times 2^5$ 32	$\binom{5}{4}\times 2^4$ 80	$\binom{5}{3}\times 2^3$ 80	$\binom{5}{2}\times 2^2$ 40	$\binom{5}{1}\times 2$ 10	$\binom{5}{0}$ 1		
6	$\binom{6}{6}\times 2^6$ 64	$\binom{6}{5}\times 2^5$ 192	$\binom{6}{4}\times 2^4$ 240	$\binom{6}{3}\times 2^3$ 160	$\binom{6}{2}\times 2^2$ 60	$\binom{6}{1}\times 2$ 12	$\binom{6}{0}$ 1	
7	$\binom{7}{7}\times 2^7$ 128	$\binom{7}{6}\times 2^6$ 448	$\binom{7}{5}\times 2^5$ 672	$\binom{7}{4}\times 2^4$ 560	$\binom{7}{3}\times 2^3$ 280	$\binom{7}{2}\times 2^2$ 84	$\binom{7}{1}\times 2$ 14	$\binom{7}{0}$ 1

¿Qué podemos deducir de esta tabla?

Fórmula de Euler

Observa que la fila de la dimensión n en la tabla es:

$$\binom{n}{n} \times 2^n, \binom{n}{n-1} \times 2^{n-1}, \dots, \binom{n}{1} \times 2, \binom{n}{0}$$

La suma de todos estos términos es:

$$\binom{n}{n} \times 2^n + \binom{n}{n-1} \times 2^{n-1} + \cdots + \binom{n}{1} \times 2 + \binom{n}{0} = (2+1)^n.$$

Podemos manipular esta suma en la siguiente forma:

$$\binom{n}{n} \times 2^n + (-1)\binom{n}{n-1} \times 2^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{1} \times 2 + (-1)^n\binom{n}{0} = (2-1)^n = 1.$$

Como consecuencia la diferencia entre la suma CP, de las columnas pares, y la suma CI, de las columnas impares, es 1.

Si descartamos la última columna,

(1) Cuando n es impar tenemos la fórmula de Euler generalizada para dimensiones superiores.

(2) Cuando n es par tenemos que la suma de las columnas pares es igual a la suma de las impares, nueva versión de la fórmula de Euler, esta vez para dimensiones impares..

¿Cuántas aristas concurren en un vértice?

Vamos a relacionar la primera y la segunda columna, esto es, las 0–caras (vértices) y las 1–caras (aristas) en cada una de las dimensiones.
La formulas para estos valores son: $c_{n,0} = \binom{n}{n} \times 2^n$ y $c_{n,1} = \binom{n}{n-1} \times 2^{n-1}$. Por lo tanto se tiene

$$nc_{n,0} = 2c_{n,1}.$$

Interpretación:
Como cada 1–cara (arista) tiene 2 vértices, resulta que en cada 0–cara (vértice) concurren n 1–caras (aristas). Observa el caso de dimensión 1, 2 ó 3.

n	$c_{n,0}$	$nc_{n,0}$		$2c_{n,1}$	$c_{n,1}$
1	2	2	=	2	1
2	4	8	=	8	4
3	8	24	=	24	12

Observa que cada 1–cara tiene dos 0–caras; es el valor de la casilla $(1, c_0)$ en la tabla de la página (10).

¿Cuántas caras concurren en una arista?

Tenemos que relacionar las columnas segunda y tercera; las fórmulas para ellas son: $c_{n,1} = \binom{n}{n-1} \times 2^{n-1}$ y $c_{n,2} = \binom{n}{n-2} \times 2^{n-2}$. Por lo tanto tenemos la relación:

$$(n-1)c_{n,1} = 2^2 c_{n,2}.$$

Interpretación:

En este caso cada 2–cara tiene 2^2 1–caras (ver la casilla $(2, c_1)$), por tanto en cada 1–cara concurren $n-1$ 2-caras (en cada arista concurren $n-1$ caras).

Este hecho choca con nuestra intuición de que dos caras determinan una arista (resultado del espacio de dimensión 3).

Actividad

(1) Al igual que podemos representar un cubo de tres dimensiones en un espacio de dos dimensiones, existen representaciones de cubos de dimensión cuatro en el espacio de tres dimensiones. ¡Busca fotos de los mismos en Internet!

(2) Un poco más arriesgado, pero echándole imaginación, podemos representar un cubo de dimensión cuatro en un espacio de dimensión tres. ¡Busca fotos de los mismos en Internet!

(3) En los casos anteriores comprueba si realmente se verifican las propiedades de incidencia que hemos obtenido.

Caras superiores

Al comparar las columnas tercera y cuarta comparamos 3-caras y 2–caras. Al desarrollar resulta:

$$c_{n,2} = \binom{n}{n-2} \times 2^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} = n(n-1)2^{n-3},$$
$$c_{n,3} = \binom{n}{n-3} \times 2^{n-3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \times 3} 2^{n-3}.$$

Igualando se tiene:

$$(n-2)c_{n,2} = 2 \times 3c_{n,3}.$$

Interpretación:

(1) Observa que cada 3–cara tiene 6 2–caras (ver casilla $(3, c_2)$), por tanto en cada 2–cara concurren $n-2$ 3–caras.

(2) Resultados similares son los siguientes:

$$(n-3)c_{n,3} = 2 \times 4c_{n,4},$$

$$(n-4)c_{n,4} = 2 \times 5c_{n,5}.$$

(3) En todos estos casos estamos utilizando las casillas que están en la subdiagonal de la tabla: 2, 4, 6, ...

¿Cúal será la fórmula general?

La fórmula general es:

$$(n-h)c_{n,h} = 2 \times (h+1)c_{n,h+1}, \text{ para } h = 0, 1, \dots, n.$$

Veamos el ejemplo de dimensión 3.

$$\begin{array}{ll}
h = 0 & 3 \times 8 = 2 \times 12, \\
h = 1 & 2 \times 12 = (2 \times 2) \times 6, \\
h = 2 & 1 \times 6 = (2 \times 3) \times 1, \\
h = 3 & 0 \times 1 = (2 \times 4) \times 0.
\end{array}$$

Otras propiedades de la tabla

Consideramos la tabla

dim	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	4	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	8	12	6	1	0	0	0	0	0	0	0
4	16	32	24	8	1	0	0	0	0	0	0
5	32	80	80	40	10	1	0	0	0	0	0
6	64	192	240	160	60	12	1	0	0	0	0
7	128	448	672	560	280	84	14	1	0	0	0
8	256	1024	1792	1792	1120	448	112	16	1	0	0
8	512	2304	4608	5376	4032	2016	672	144	18	1	0
10	1024	5120	11520	15360	13440	8064	3360	960	180	20	1

(1) La diagonal es la sucesión constante igual a 1. Nos dice el número de n–caras.

(2) La segunda diagonal es una sucesión aritmética de razón 2 y término inicial 2. Nos dice cuántas $n-1$–caras tiene cada n–cara.

(3) La tercera diagonal es una sucesión aritmética de segundo orden con término inicial 4, y término general $a_n = 2n(n+1)$.

(4) La cuarta diagonal es una sucesión aritmética de tercer orden con término inicial 8, y término general $a_n = \frac{4}{3}n(n-1)(n-2)$.

(5) La quinta diagonal es una sucesión aritmética de cuarto orden con término inicial 16, y término general $a_n = \frac{2}{3}n(n-1)(n-2)(n-3)$.

Todas ellas son sucesiones aritméticas, podemos calcular el término general resolviendo ecuaciones lineales o podemos calcular la forma recurrente de las mismas.

Cálculo de la relación de recurrencia

Estudiamos la tercera diagonal: 4, 12, 24, 40, 60, 84, 112, 144, 180, ... Calculando las diferencias sucesivas se tiene

$$\begin{array}{lccccccc} a_n & 4 & & 12 & & 24 & & 40\dots \\ d_{1,n} & & 8 & & 12 & & 16 & \dots \\ d_{2,n} & & & 4 & & 4 & & 4\ \dots \end{array}$$

Donde la sucesión $d_{1,n}$ es la primera sucesión de diferencias, definida $d_{1,n} = a_{n+1} - a_n$, y $d_{2,n}$ es la segunda sucesión de diferencias, definida $d_{2,n} = d_{1,n+1} - d_{1,n}$.
Tenemos entonces

$$d_{2,n} = d_{1,n+1} - d_{1,n} = (a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n) = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$$

Para describir completamente la sucesión a_n es necesario además conocer los valores de a_1 y a_2. En este caso se tiene $a_1 = 4$, $a_2 = 12$ y la relación $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 4$.

Cálculo del término general

Al calcular las diferencias hemos comprobado que se estabilizan en la segunda sucesión de diferencias, esto significa que tenemos una sucesión aritmética de orden dos, y que su término general a_n está dado por un polinomio de grado 2 en n. En este caso tendremos

$$a_n = xn^2 + yn + z,$$

siendo x, y, z números reales a determinar en cada caso. Dado a n los valores 1, 2 y 3 se tienen tres relaciones que nos permitirán determinar los valores de x, y y z.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ 4x + 2y + z &= 12 \\ 9x + 3y + z &= 24 \end{aligned}\right\}$$

La solución de este sistema es: $x = 2$, $y = 2$, $z = 0$, y el término general de la sucesión es:

$$a_n = 2n^2 + 2n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Actividades: Tabla a lo Tartaglia

Podemos ordenar los elementos de la siguiente forma alternativa, para obtener nuevas propiedades:

1										
2	1									
4	4	1								
8	12	6	1							
16	32	24	8	1						
32	80	80	40	10	1					
64	192	240	160	60	12	1				
128	448	672	560	280	84	14	1			
256	1024	1792	1792	1120	448	112	16	1		
512	2304	4608	5376	4032	2016	672	144	18	1	
1024	5120	11520	15360	13440	8064	3360	960	180	20	1

(1) ¿Cómo puedes reconstruir la tabla si sólo conoces que el vértice superior es igual a 1?

(2) Escribe la tabla anterior haciendo uso de los números combinatorios.

(3) Descubre relaciones entre las diversas sucesiones que se pueden formar en la tabla. Las sucesiones paralelas a la línea de unos son sucesiones aritméticas de órdenes crecientes ya estudiadas. Las paralelas a la de las potencias de 2 son sucesiones aritmético–geométricas; esto es, sucesiones del tipo $a_n = b_n c_n$, para b_n una sucesión geométrica y c_n una sucesión aritmética.

Recupera las actividades de la tabla de Tartaglia en el caso clásico.

Actividad: carreras de caras

Un análisis pormenorizado de las tabla de caras de los hipercubos en las distintas dimensiones, uno de cuyos ejemplos es el siguiente:

dim	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	4	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	8	12	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	16	32	24	8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	32	80	80	40	10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	64	192	240	160	60	12	1	0	0	0	0	0	0	0	0
7	128	448	672	560	280	84	14	1	0	0	0	0	0	0	0
8	256	1024	1792	1792	1120	448	112	16	1	0	0	0	0	0	0
9	512	2304	4608	5376	4032	2016	672	144	18	1	0	0	0	0	0
10	1024	5120	11520	15360	13440	8064	3360	960	180	20	1	0	0	0	0
11	2048	11264	28160	42240	42240	29568	14784	5280	1320	220	22	1	0	0	0
12	4096	24576	67584	112640	126720	101376	59136	25344	7920	1760	264	24	1	0	0
13	8192	53248	159744	292864	366080	329472	219648	109824	41184	11440	2288	312	26	1	0
14	16384	114688	372736	745472	1025024	1025024	768768	439296	192192	64064	16016	2912	364	28	1

nos permite ver que hay ciertas dimensiones para las que el número más alto de i–caras se alcanza en dos columnas consecutivas. En el caso de dimensión 2 es el 4 que se alcanza para c_1 y c_2. Otro caso es el de dimensión 5, que se alcanza para c_2 y c_3.

Problema 1

Busca la regla que verifica y pruébala.
Tienes que probar que

(1) si en una dimensión dos columnas son iguales, entonces la dimensión d es de un determinado tipo, (descripción aritmética de d).
(2) para cada una de las anteriores dimensiones siempre hay dos columnas que tienen el mismo valor.

Observa que a partir de la dimensión 2 hay cuatro dimensiones consecutivas para las que el mayor número de caras se alcanza en una misma columna.

Problema 2

Determina todos los grupos de dimensiones (filas) que verifican la propiedad anterior. Tienes que probar que esto es así, no sólo comprobarlo.

Problema 3

Dado un entero positivo o nulo, determina la columna en la que el número de caras es máximo.

El símplice

En el caso del símplice de dimensión cuatro tenemos los siguientes puntos:

$$(0,0,0,0),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)$$

En este caso el símplice en dimensión cuatro se construye con estos puntos, y sus elementos, al igual que con el cubo, se pueden deducir fácilmente.

La tabla que contiene la información es la siguiente:

dim	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
0	1							
1	2	1						
2	3	3	1					
3	4	6	4	1				
4	5	10	10	5	1			
5	$\binom{6}{1}$ 6	$\binom{6}{2}$ 15	$\binom{6}{3}$ 20	$\binom{6}{4}$ 15	$\binom{6}{5}$ 6	$\binom{6}{6}$ 1		
6	$\binom{7}{1}$ 7	$\binom{7}{2}$ 21	$\binom{7}{3}$ 35	$\binom{7}{4}$ 35	$\binom{7}{5}$ 21	$\binom{7}{6}$ 7	$\binom{7}{7}$ 1	
7	$\binom{8}{1}$ 8	$\binom{8}{2}$ 28	$\binom{8}{3}$ 56	$\binom{8}{4}$ 70	$\binom{8}{5}$ 56	$\binom{8}{6}$ 28	$\binom{8}{7}$ 8	$\binom{8}{8}$ 1

Observa que es una parte del triángulo de Tartaglia.

Comprueba la formula de Euler.

Comprueba la relación entre vértices, aristas y caras, las diferentes n–caras.